# משפט

תהי f חסומה על . אזי

ז"א לכל , קיים כך שאם אזי

## הוכחה

יהי . אזי קיימת חלוקה כך ש.

### הוכחה

אפשר להניח ש, שכן אם , אזי לכל חלוקה כפי שראינו, .

נסמן ב את מספר הנקודות ב, ונשים . תהי T חלוקה כך ש. נתבונן בחלוקה . אזי הינ העדנה של T וגם של . נסמן בp את ההפרש בין מספר נקודות של ושל . אזי , ואז:  
לכן , .

# משפט

תהי f חסומה ב. אזי f אינטגרבילית שם אם ורק אם ואז

## הוכחה

נניח שf אינטגרבילית על . יהי , אזי קיים כך שאם אזי מתקיים לכל בחירה של , באשר

תהי T חלוקה כנ"ל.   
באופן דומה   
 ⇦

עכשיו נניח ש. נסמן את הערך המשותף בI. לכל חלוקה T מתקיים לכל סכום רימן המתאים לT. לפי משפט שהוכחנו:

# משפט

אם f אינט' ב, אזי היא חסומה ולכל קיים כך שלכל שתי חלוקות של המקיימות מתקיים

## הוכחה

לפי המשפט הקודם אם f אינט' על , אזי , לכן לכל קיימים כך שאם אזי ואם אזי . מכאן:

# משפט

תהי f חסומה. אם לכל קיימות חלוקות של כך ש אזי f אינט' על .

## הוכחה

יהי , ו כנ"ל. אזי   
 לכל , לכן וf אינט'.

# משפט

אם f אינט' על אזי לכל קיים כך שאם אזי

# משפט

אם f חסומה ולכל קיימת חלוקה T כך ש אזי f אינט'.

# תנאי רימן לאינטגרביליות

תהי . אזי f אינט' על אם ורק אם:

1. f חסומה על

באשר ,

## הוכחה

נניח שf אינט' על . אזי שא) מתקיים, כיוון שf אינט'.

בכיוון ההפוך: ⇦ ⇦ ⇦ אינט'.

# משפט

תהי רציפה ב. אזי f אינט' שם.

## הוכחה

נשתמש במשפט רימן. אם f רציפה ב היא חסומה שם. יהי . כיוון שf ריצפה במ"ש ב קיים כך שאם ו אזי . עכשיו, תהי T חלוקה של כך ש. נגדיר כך ש  
 ולכן . עכשיו:

# משפט

תהי f חסומה ב, רציפה ב. אזי f אינט' ב

## הוכחה

יהי . נוכיח שקיימת חלוקה של כך ש. נבחר כך ש. נתבונן ב באשר (נניח ש). f רציפה על ולכן אינט' שם. לכן קיימת חלוקה T של כך ש. נגדיר , אזי הינה חלוקה של .

נסמן: